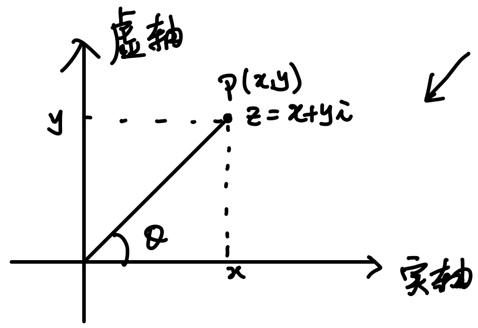
§1.6 复数 2022.02.24

$z = x + iy$（i：$\sqrt{-1}$）

x：实部 $\mathrm{Re}\,z$　　y：虚部 $\mathrm{Im}\,z$

复数的几何表示



z 用 $\overrightarrow{OP}$ 表示 $(z = \overrightarrow{OP})$

z的模长： $|z| := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$

z的辐角： $\arg z :=$ x轴(逆时针)旋转到 $\overrightarrow{OP}$ 的角度 $= \theta + 2k\pi$.

(一般规定 $0 \le \arg z < 2\pi$ 主值)

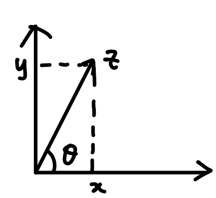
$z = x + iy$ 的共轭复数定义为：

$$\bar{z} = x - iy$$

性质：

- $z_1 + z_2 = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} + \arg z = 2\pi$
- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

三角表示： $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



推论: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 则

$|z_1z_2| = r_1r_2$ & $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

Pf: $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$

$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$ □

复数乘法的几何解释. $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z \xrightarrow{\text{伸缩}} rz \xrightarrow{\text{旋转}} wz$$

Euler公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

↑ 暂时看成一个记号

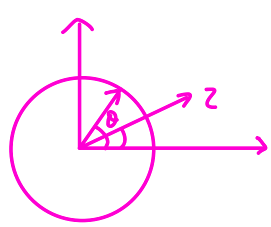
推论: 1) $r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2} = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) (de Moive) $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

例: 求 $z = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ $(-\pi \le \theta < \pi)$ 的三角形式.

解: $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$\arg z = \arccos\dfrac{1+\cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\theta}{2}$



$\Rightarrow z = 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

例: 逆时针旋转 $z = x+iy$ 角度 $\frac{\pi}{2}$.

解: $ze^{\frac{\pi}{2}i} = (x+iy)i = -y+ix$.

例：解方程：$z^n = a$.

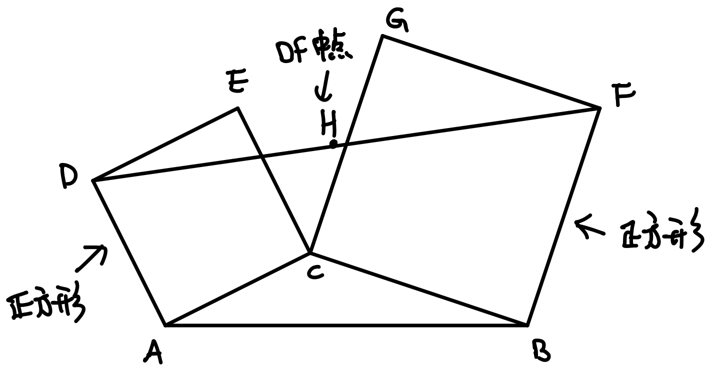
解：设 $a = re^{i\theta}$，$r \geq 0$，$0 \leq \theta < 2\pi$.

设 $z = se^{i\phi}$，则

$$\left.\begin{array}{l} s^n = r \\ n\phi = \theta + 2k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

□

例：



则 H 与 C 无关.

证：$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}e^{\frac{\pi i}{2}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}e^{\frac{\pi i}{2}} = \frac{1+i}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ □

§1.7 数域

数集 := 复数集的子集

例：$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

定义 1.7.1. 设数集 F 关于 $+, -, \times, \div$ 封闭，若 $F \neq \{0\}$ 则称 F 为数域.

性质：F = 数域 $\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq F$.（即 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域）.

例：$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为数域

§1.8 高维数组向量

定义：一个 **n维数组向量** a 是一个有序的 n 元数组

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{其中 } a_i \in F$$

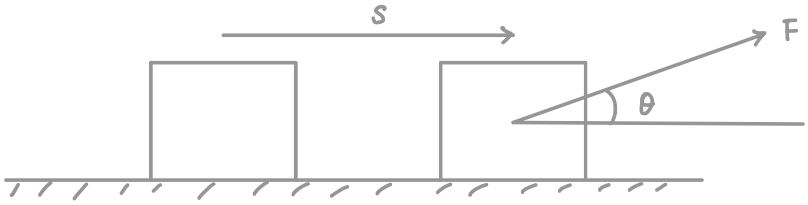
表示形式：**行向量** $a = (a_1, \cdots, a_n)$，**列向量** $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

基本向量
$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

事实：任意 n 维数组向量都可以表示为基本向量的线性组合.

Pf：$\forall \ a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \Rightarrow a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ □

向量的数量积（内积，点积）



力F所作的功为： $W = |F|\cdot|s|\cdot\cos\theta$

定义 1.3.1. a与b的**数量积（内积）**

$$a\cdot b := |a|\cdot|b|\cdot\cos\theta.$$

（θ：a与b的夹角.）

注： $a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b = 0$.

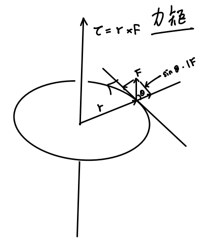
命题 1.3.1.
$a\cdot b = b\cdot a$ ✓
$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$?
$(\lambda a)\cdot b = \lambda(a\cdot b) = a\cdot(\lambda b)$ ✓
$a^2 := a\cdot a \geq 0$ ✓ $a\cdot a = |a|^2$.
（等号成立当且仅当 $a=0$.）

推论：
1) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2a\cdot b + b^2$ ✓
2) $|a|+|b| \geq |a+b|$

Pf： $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta \leq a^2+b^2+2|a|\cdot|b| = (|a|+|b|)^2$ □ （θ：夹角）

内积 ⇒ 模长 & 夹角
$$\begin{cases} |a| = \sqrt{a^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} \end{cases}$$

向量的向量积（外积，叉积）



定义 1.4.1 a, b 的向量积

$$a \times b := \begin{cases} \text{大小} & |a| \cdot |b| \cdot \sin\theta \\ \text{方向:} & a\times b \perp a \ \& \ a\times b \perp b \ \& \ a, b, a\times b \text{ 右手系} \end{cases}$$

θ：夹角；（平行四边形的面积）

命题 1.4.1

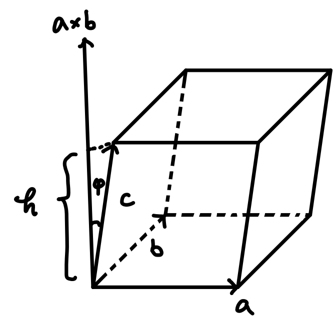
1) $a \times b = -b \times a$ ✓ 反交换

2) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b)$ } 线性 ✓

3) $(a+b)\times c = a \times c + b \times c$?

向量的混合积 $(a\times b)\cdot c$

§1.5.1 混合积的几何意义



$$V = S \cdot h = |a\times b| \cdot \overbrace{|c| \cdot |\cos\varphi|} = |(a\times b)\cdot c|$$

（V：体积；S：底面积；h：高）

$$\Rightarrow (a\times b)\cdot c = \begin{cases} V & \text{若 } a, b, c \text{ 为右手系} \\ -V & \cdots \ \text{左} \cdots \end{cases}$$

推论：

1) $(a\times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c\times a)\cdot b$
$= -(b\times a)\cdot c = -(c\times b)\cdot a = -(a\times c)\cdot b$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (a\times b)\cdot c = 0$

特别 $a \parallel b$ or $a \parallel c$ or $b \parallel c \Rightarrow (a\times b)\cdot c = 0$

计算内外积混合积

$[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ = 直角坐标系，$\Rightarrow \begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \end{cases}$

内积夹角公式：$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$，$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$，则

$$a\cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \Rightarrow |a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

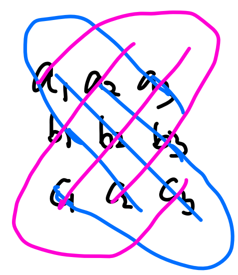
公式：

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

Pf：$\begin{cases} i\times i = j\times j = k\times k = 0 \\ i\times j = k,\quad j\times k = i,\quad k\times i = j \end{cases}$

公式：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$



例：求垂直于 $a=(-1,2,1)$ & $b=(1,0,3)$ 的单位向量.

解：$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i+4j-2k \Rightarrow |a\times b| = 2\sqrt{14} \Rightarrow$ 单位向量为 $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,-1)$.

例 $A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$, $C(1,3,5)$, $D(3,2,1) \Rightarrow V_{ABCD} = ?$

解：$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{4}{3}$ □